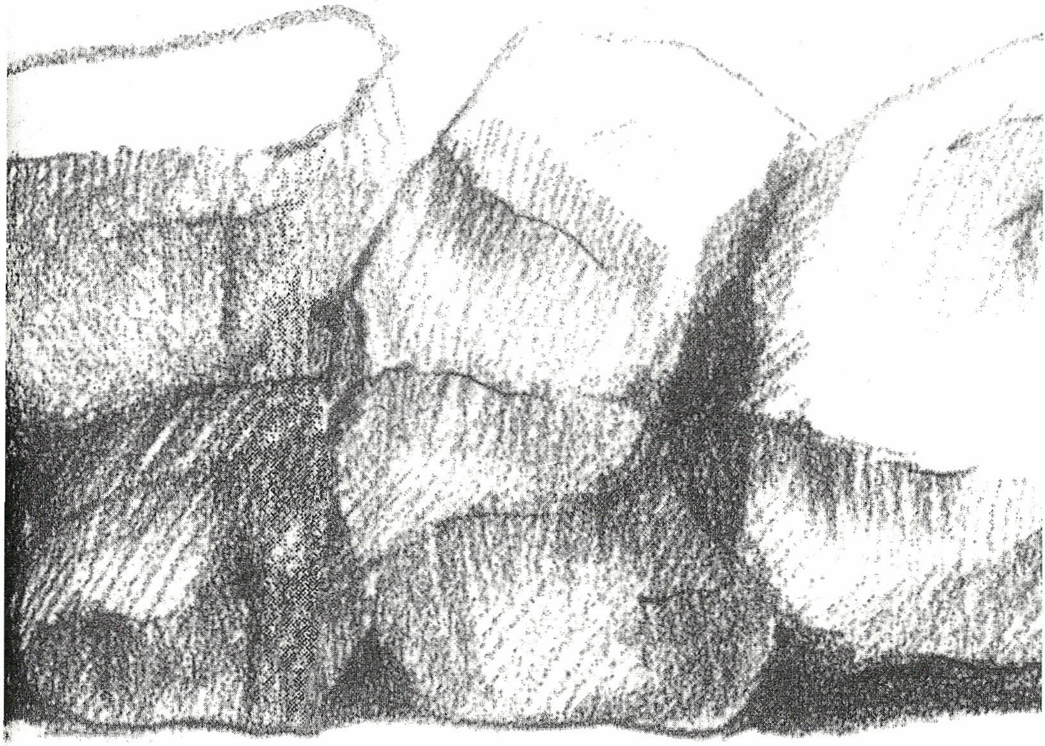

B. Caramba, nunca dormi tão bem.

A. Nem eu. É tão bom acordar e estar de facto acordada, não "acordada-com-café".

B. Onde estávamos ontem antes de perdermos a cabeça e esquecermos a matemática?

A. (*sorrindo*) Acho que tínhamos acabado de provar que os números de Conway se comportam como é suposto comportarem-se todos os números. Podem ser ordenados numa recta, do menor para o maior, em que cada um é maior do que todos os que lhe ficam à esquerda e menor do que todos os que lhe ficam à direita.

B. É mesmo verdade que provámos isso?

A. Sim, pelo menos, os números diferentes podem ser ordenados na recta, de acordo com (6). Cada número novo tem de cair num lugar da recta entre os outros.

B. Agora deve ser possível compreender o que sucedeu no terceiro dia. Aqueles 20×20 cálculos foram muito reduzidos. Os nossos teoremas (4) e (5) mostram que

$$\boldsymbol{<}: - \boldsymbol{>} < \; - \; < \boldsymbol{<} - :\bullet \boldsymbol{>} < \bullet < \boldsymbol{<} \bullet : | \boldsymbol{>} < \boldsymbol{<} | :\boldsymbol{>},$$

pelo que, encontrando-se já posicionados sete números, resta-nos colocar os outros nos lugares certos.

Sabes, agora que isto está a ficar fácil, começa a parecer-se com umas palavras cruzadas.

A. Também sabemos, por exemplo, que $\boldsymbol{<} - : | \boldsymbol{>}$ se encontra algures entre $\boldsymbol{-}$ e $\Big|$. Vamos compará-lo com o número médio, o 0.

B. Hum... é simultaneamente $\leqslant$ e $\geqslant 0$; portanto, deve ser semelhante a 0, de acordo com a regra (2). Como te disse ontem, é praticamente igual a 0; portanto, podemos esquecê-lo. Já demos baixa de oito, faltam doze.

A. Vamos tentar resolver os casos em que X_E ou X_D têm mais de um elemento, como fiz ontem de manhã. Durante a noite tive uma ideia que pode funcionar. Suponhamos que $x = (X_E, X_D)$ é um número e que tomamos dois conjuntos de números Y_E e Y_D tais que

$$Y_E < x < Y_D\,.$$

Então creio que x é semelhante a z, onde

$$z = (Y_E \cup X_E, X_D \cup Y_D)\;.$$

Por outras palavras, aumentando os conjuntos X_E e X_D, juntando-lhes números dos lados apropriados, isso não altera essencialmente x.

B. Vejamos, parece plausível. De qualquer modo, z é um número, de acordo com a regra (1); será criado mais cedo ou mais tarde.

A. Para mostrar que $z \leqslant x$ temos de provar que

$$Y_E \cup X_E < x \quad \text{e} \quad z < X_D \,.$$

Mas isso agora é fácil, porque já sabemos que $Y_E < x$, $X_E < x$ e $z < X_D \cup Y_D$, de acordo com (5).

B. E o mesmo argumento, trocando os papéis de esquerdo e direito, mostra que $x \leqslant z$. Tens razão:

$$\text{se} \quad Y_E < x < Y_D \,, \quad \text{então} \quad x \equiv (Y_E \cup X_E, X_D \cup Y_D) \,. \tag{9}$$

(Vou escrever "$x \equiv z$" para significar que x é semelhante a z, isto é, $x \leqslant z$ e $z \leqslant x$).

A. Isso prova exactamente o que queríamos. Por exemplo:

$$< - \bullet : | > \equiv < \bullet : | >$$

$$<: - \bullet > \equiv <: - >$$

etc.

B. Então só sobram dois casos: $< - :>$ e $<: | >$.

A. Na realidade, (9) aplica-se a ambos, com $x = 0$.

B. Inteligente! Temos então o terceiro dia completamente analisado; somente os sete números listados acima são essencialmente diferentes.

A. Pergunto a mim mesma se não acontecerá também a mesma coisa nos dias seguintes. Suponhamos que os números diferentes que existem ao fim de n dias são

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_m \,.$$

Então talvez os únicos números novos nascidos no $(n+1)$-ésimo dia sejam

$$(\emptyset, \{x_1\}), (\{x_1\}, \{x_2\}), \ldots, (\{x_{m-1}\}, \{x_m\}), (\{x_m\}, \emptyset) \,.$$

B. Alice, és maravilhosa! Se conseguirmos prová-lo, ficará resolvida de uma só vez uma infinidade de dias. Estás a ultrapassar o criador.

A. Talvez não consigamos demonstrá-lo.

B. Não perdemos nada em tentar alguns casos particulares. O que sucederia se tivéssemos o número $(\{x_{i-1}\}, \{x_{i+1}\})$? Teria de ser igual a um dos outros.

A. Claro, é igual a x_i, de acordo com (9). Repara, cada elemento de X_{iE} é $\leqslant x_{i-1}$ e cada elemento de X_{iD} é $\geqslant x_{i+1}$. Portanto, de acordo com (9), temos

$$x_i \equiv (\{x_{i-1}\} \cup X_{iE}, X_{iD} \cup \{x_{i+1}\}) \ .$$

E, de novo, de acordo com (9),

$$(\{x_{i-1}\}, \{x_{i+1}\}) \equiv (X_{iE} \cup \{x_{i-1}\}, \{x_{i+1}\} \cup X_{iD}) \ .$$

Pela propriedade transitiva, $x_i \equiv (\{x_{i-1}\}, \{x_{i+1}\})$.

B. (*abanando a cabeça*) Incrível, Holmes!

A. Elementar, meu caro Watson. Basta usar o poder de dedução.

B. Os teus índices não são muito agradáveis, mas enfim... Como tratarias o número $(\{x_{i-1}\}, \{x_{j+1}\})$ se $i < j$?

A. (*encolhendo os ombros*) Estava a ver que não perguntavas isso. Não sei.

B. O teu argumento funcionava muito bem se houvesse um número x em que cada elemento de X_E fosse $\leqslant x_{i-1}$ e cada elemento de X_D fosse $\geqslant x_{j+1}$.

A. Sim, tens razão, não tinha reparado. Mas todos esses elementos intermédios, x_i, x_{i+1}, ..., x_j, poderiam interferir.

B. Creio que sim... Não, já sei! Vamos supor que x é, de entre os x_i, x_{i+1}, ..., x_j, aquele que foi criado *primeiro*. Então X_E e X_D não podem envolver nenhum dos outros! Logo, $(\{x_{i-1}\}, \{x_{j+1}\}) \equiv x$.

A. Mereces um beijo.

. . . .

. . . .

B. (*sorrindo*) O problema ainda não está completamente resolvido. Temos de considerar números como $(\emptyset, \{x_{j+1}\})$ e $(\{x_{i-1}\}, \emptyset)$. Mas, no primeiro caso, obtemos o primeiro número a ser criado de entre x_1, x_2, ..., x_j, e no segundo trata-se do primeiro número criado de entre x_i, x_{i+1}, ..., x_m.

A. E se o primeiro número criado não for único? Isto é, e se dois dos números de entre x_i, ..., x_j, tivessem sido criados (primeiro) no mesmo dia?

B. Ups!... Não, não há problema, isso não pode acontecer, porque a demonstração ainda funcionaria e mostraria que os dois números são um semelhante ao outro, o que é impossível.

A. Lindo! Resolveste o problema de todos os dias de uma só vez.

B. Com a tua ajuda. Vejamos, no quarto dia haverá 8 novos números, no quinto mais 16, e assim sucessivamente.

A. Sim, no fim do n-ésimo dia haverá exactamente $2^n - 1$ números diferentes.

B. Sabes, acho que esse Conway não era tão esperto assim. Quer dizer, podia ter dado regras mais fáceis com o mesmo efeito. Não há necessidade de falar em conjuntos de números e tudo isso. Bastava dizer que os novos números são criados entre cada dois antigos consecutivos e nas extremidades.

C. Asneira! Espera até veres os conjuntos infinitos.

A. Que é isto? Ouviste alguma coisa? Parecia um trovão.

B. Temo que estejamos a chegar à época das monções.

NÚMEROS SURREAIS / DONALD E. KNUTH ; TRAD. JORGE NUNO SILVA

AUTOR(ES):	Knuth, Donald E.; Silva, Jorge Nuno Oliveira e, 1956-, trad.
EDIÇÃO:	1a ed
PUBLICAÇÃO:	Lisboa : Gradiva, 2002
DESCR. FÍSICA:	111, [4] p. ; 23 cm
COLECÇÃO:	O prazer da matemática ; 29
NOTAS:	Tít. orig.: surreal numbers
ISBN:	972-662-853-9